OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1900. Nr. 4.

Géométrie des droites dans l'espace non euclidien.

Par

Johannes Petersen.

Introduction.

Le présent travail contient l'extension d'un principe antérieurement exposé par nous dans le mémoire intitulé *Nouveau principe pour études de géométrie des droites* (Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Danemark, Copenhague, 1898).

Voici la substance du résultat:

Si, dans l'espace non euclidien, on a une figure arbitraire formée des droites a, b, c . . . et que par un point quelconque de l'espace on trace les deux systèmes de parallèles de Clifford relatives à ces droites (voir Clifford: *Math. Papers*), a_1, b_1, c_1 . . . . et a_2, b_2, c_2 . . ., la figure de droites sera univoquement déterminée par ces faisceaux, de telle manière que l'angle de deux quelconques des droites a_1 et b_1 d'un faisceau sera égal à la somme des distances des droites correspondantes a et b dans l'espace, tandis que l'angle formé par les droites correspondantes

a_2 et b_2 du second faisceau est toujours égal à la différence des deux distances de a à b.

Par conséquent, ce principe fournit dès l'abord toutes les relations identiques pour des droites arbitraires en géométrie non euclidienne.

La première partie de notre mémoire expose sous une forme géométrique élémentaire la géométrie elliptique, l'espace elliptique étant représenté par le système de figures égales ayant un point commun dans l'espace euclidien.

C'est de cette exposition comme base que nous tirons la démonstration du théorème susnommé de géométrie des droites, sous la forme où nous avons originairement trouvé cette démonstration.

Dans la dernière section intitulée *Géométrie des droites dans l'espace hyperbolique*, nous donnons une preuve directe et générale de ce théorème au moyen de l'exposition bien connue de la géométrie non euclidienne (voir Klein: *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie*, Math. Ann. Bd. 4).

---

1. Un triangle sphérique ABC sur une sphère dont la surface a un sens positif déterminé, n'a des côtés et des angles parfaitement déterminés que lorsque les grands cercles BC, CA, AB ont des sens positifs donnés a, b et c.

Désignons les angles par

$$A = (bc), \quad B = (ca), \quad C = (ab)$$

et les côtés par

$$a = BC, \quad b = CA \quad \text{et} \quad c = AB,$$

conventions auxquelles nous nous en tiendrons dans ce qui suit.

2. La rotation d'une figure sur la surface de la sphère est parfaitement déterminée par le point de rotation A et l'amplitude θ, déterminée de signe conformément au sens positif relativement au point A de la sphère.

Désignons par (θ, A) une pareille rotation.

La rotation peut aussi se déterminer par le grand cercle qui glisse sur lui-même. Alors, ce grand cercle doit avoir un sens positif indiqué a, et il faut que l'amplitude θ soit déterminée en conséquence.

En ce cas, désignons la rotation par (θ, a).

3. Si, sur une même sphère, on a deux triangles sphériques quelconques, ABC et $A_1B_1C_1$ parfaitement déterminées, les six rotations que voici:

$$(A - A_1, A),\quad (c - c_1, c),\quad (B - B_1, B),\quad (a - a_1, a)$$
$$(C - C_1, C),\quad (b - b_1, b),$$

effectuées dans l'ordre cité, se détruiront.

Antérieurement nous avons démontré cette proposition comme l'extension du théorème infinitésimal que nous avons utilisé comme base de quelques recherches relatives à la géométrie des droites [1]).

La démonstration consiste à imaginer $A_1B_1C_1$ posé de façon que A_1 tombe en A et b_1 sur b. Si ensuite on fait participer $A_1B_1C_1$ aux six rotations susdites, il est d'emblée évident que ce triangle retourne à sa position première [2]).

4. Inversement, un triangle sphérique ABC étant donné, et les six rotations

$$(A_1, A),\quad (c_1, c).\quad (B_1, B),\quad (a_1, a),\quad (C_1, C),\quad (b_1, b)$$

effectuées dans l'ordre susdit, devant se détruire, il faut bien

---

1) *Nouveau principe pour études de géométrie des droites.* Cité par *Nouv. pr.* dans ce qui suit.

2) H. Valentiner: *Application de la théorie des quaternions de Caspar Wessel, à la démonstration d'un théorème récent* (Bulletin de l'Acad. Roy. de Danemark, 1899).

qu'il existe un autre triangle sphérique $A_2B_2C_2$, dont voici les éléments:

$$A - A_1, \quad c - c_1, \quad B - B_1, \quad a - a_1, \quad C - C_1, \quad b - b_1,$$

ce qu'il faut entendre de manière que

$$\begin{aligned} A_2 &= A - A_1 & a_2 &= a - a_1 \\ B_2 &= B - B_1 & b_2 &= b - b_1 \\ C_2 &= C - C_1 & c_2 &= c - c_1. \end{aligned}$$

Pour le démontrer, construisons d'abord un triangle sphérique $A_2B_2C_2$ avec les éléments

$$\begin{aligned} A_2 &= A - A_1 \\ c_2 &= c - c_1 \\ B_2 &= B - B_1. \end{aligned}$$

Deux solutions se présentent. Si l'une est constituée par $A_2B_2C_2$, on obtient l'autre en changeant C_2 avec son point C_2^1 diamétralement opposé sur la sphère.

Or, d'après la proposition du n° 3, les rotations de chacun des systèmes suivants se détruiront:

1° (A_1, A), (c_1, c), (B_1, B), $(a - a_2, a)$, $(C - C_2, C)$, $(b - b_2, b)$.

2° $A_1, A)$, (c_1, c), (B_1, B), $(a - a_2 + 180°, a)$, $(C + C_2, C)$, $(b - b_2 + 180°, b)$.

Si donc on pose $a - a_2 = \alpha$, $C - C_2 = \gamma$, $b - b_2 = \beta$, les rotations (α, a), (γ, C), (β, b) devront équivaloir à

$$(\alpha + 180°, a), \quad (2\,C - \gamma, C), \quad (\beta + 180°, b).$$

Nous allons montrer que si le système

$$(a_1, a), \quad (C_1, C), \quad (b_1, b)$$

doit équivaloir à chacun des deux systèmes susdits, il faut qu'on ait, ou bien

$$a_1 = \alpha, \quad C_1 = \gamma, \quad b_1 = \beta, \quad \text{ou bien}$$
$$a_1 = \alpha + 180°, \quad C_1 = 2\,C - \gamma, \quad b_1 = \beta + 180°.$$

Les rotations

$$(\alpha, a), \quad (\gamma, C), \quad (\beta, b), \quad (-b_1, b), \quad (-C_1, C), \quad (-a_1, a)$$

doivent se détruire.

On suppose déterminée par le grand cercle a et un de ses points, P, la figure invariable qui participe aux rotations. Dans la première de ces rotations (α, a), a glisse sur lui-même et P arrive jusqu'en P_1, de façon que $PP_1 = \alpha$.

Dans la seconde rotation (γ, C), a arrive jusqu'en a_1 et P_1 jusqu'en P_2 (sur a_1), de sorte que $(aa_1) = \gamma$.

Dans la rotation (β, b), b glisse sur lui-même, et, invariablement lié à ce dernier, a_1 l'accompagne jusqu'à la position a_2; C et supposé arriver ainsi en C_1, comme P_2 en P_3. a_2 coupe b, non seulement en C_1, mais encore en C_2. Or, si l'on veut ramener à sa position première la figure, déterminée par a_2 et P_3, au moyen des rotations successives $(-b_1, b)$, $(-C_1, C)$, $(-a_1, a)$, il faudra que C_1 ou bien C_2 arrive jusqu'en C par la rotation $(-b_1, b)$.

Or, $C_1 C = -\beta$ et $C_2 C = -180^\circ - \beta$, on a, ou:

$$1^0 \ b_1 = \beta \quad \text{ou} \quad 2^0 \ b_1 = \beta + 180^\circ.$$

Au premier cas, on a ensuite $C_1 = \gamma$, $a_1 = \alpha$.

Dans le second cas, la rotation $(-b_1, b)$ amène C_2 en C et a_2 en a_2^1, de sorte que $(aa_1^1) = 2C - \gamma$, (aa_1^1) désignant l'angle dont il faut tourner a autour de C pour être amené sur a_1^1.

En conséquence, on a $C_1 = 2C - \gamma$ et $a_1 = \alpha + 180^\circ$.

Nous avons donc prouvé que les éléments $A - A_1$, $c - c_1$, $B - B_1$, $a - a_1$, $C - C_1$, $b - b_1$ appartiennent ou au $\triangle A_2 B_2 C_2$ ou au $\triangle A_2 B_2 C_2^1$, d'où suit que ce sont toujours des éléments d'un triangle sphérique.

La proposition qu'on vient d'établir est appelée dans ce qui suit *le théorème des rotations*.

Or peut aisément étendre cette proposition en étudiant un polygone sphérique au lieu d'un triangle sphérique.

Composition de rotations sur la sphère.

5. Le théorème des rotations peut servir à établir les conditions pour qu'une série de rotations données se détruisent les unes les autres. Si trois rotations (α, A), (β, B), (γ, C) doivent se détruire, on obtiendra, après avoir choisi des sens positifs sur les côtés du triangle sphérique ABC, que

$$A - \alpha,\ AB,\ B - \beta,\ BC,\ C - \gamma,\ CA$$

soient les six éléments successifs d'un triangle sphérique. Les côtés de ce dernier étant identiques à ceux du triangle primitif, on a ou bien $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ou bien

$$\alpha = 2A,\ \beta = 2B,\ \gamma = 2C.$$

En conséquence, les angles du triangle des points de rotation représente la demi-amplitude, ce qui nous donne la proposition bien connue sur la composition de deux rotations finies sur la sphère.

Si les rotations (α_1, A_1), $\alpha_2, A_2)$ ... (α_n, A_n) doivent se détruire, on voit, après avoir choisi des sens positifs sur les côtés du polygone sphérique $A_1 A_2 \ldots A_n$, qu'il doit exister un autre polygone sphérique $A_1^1 A_1^1 \ldots A_n^1$ ayant pour côtés $A_1^1 A_2^1 = A_1 A_2$, $A_2^1 A_3^1 = A_2 A_3, \ldots A_{n-1}^1 A_n^1 = A_{n-1} A_n$, $A_n^1 A_1^1 = A_n A_1$, tandis que les angles sont $A_1^1 = A_1 - \alpha_1$, $A_2^1 = A_2 - \alpha_2 \ldots A_n^1 = A_n - \alpha_n$.

Faut-il décomposer une rotation donnée (ω, P) en trois autres ayant pour points de rotation A, B, C, on effectue cette opération de la manière que voici: si l'on désigne par (α, A), (β, B) et (γ, C) les rotations cherchées,

$$(\alpha, A),\ (\beta, B),\ (\gamma, C),\ (-\omega, P)$$

doivent se détruire.

On détermine parfaitement le quadrilatère $ABCP$ en choisissant des sens positifs sur les côtés; on en désigne les angles par A, B, C, P. Ensuite on construit un nouveau quadrilatère sphérique $A_1 B_1 C_1 P_1$ en faisant $A_1 B_1 = AB$,

$B_1 C_1 = BC$, $C_1 P_1 = CP$, $P_1 A_1 = PA$, tandis que l'angle $P_1 = P + \omega$. En général il se présente deux solutions. D'après cela, on a $A - A_1 = \alpha$, $B - B_1 = \beta$, $C - C_1 = \gamma$.

Le problème peut devenir impossible; mais il admet toujours deux solutions, si $AB = BC = \pm 90°$.

Exposition géométrique d'un espace elliptique.

6. Voici la proposition qui, dans la suite, servira substantiellement de base aux recherches relatives à un espace non euclidien: La géométrie euclidienne relative au système de figures égales sur une surface sphérique (réelle) donnée (*la sphère fondamentale*) peut s'identifier avec la géométrie du système de points d'un espace elliptique.

Deux figures égales sur la sphère ont un point commun, c'est-à-dire le point de rotation des figures; à proprement parler, il y en a deux, diamétralement opposés.

L'angle dont A_1, l'une de ces figures, doit tourner autour d'un de ces points, préalablement déterminé, pour qu'elle soit amenée sur l'autre figure A_2, pourrait servir de mesure au rapport de position mutuel entre les figures. Toutefois nous préférons choisir la moitié de l'amplitude pour mesure de «la distance» des figures.

Par la distance $(A_1 A_2)$ parfaitement déterminée de la figure A_1 à la figure A_2, nous entendons la moitié de l'angle dont A_1, l'une des figures, doit tourner autour d'un point nettement désigné, l'un des deux points de rotation possibles (et diamétralement opposés), pour qu'elle soit amenée sur l'autre, A_2. L'angle est supposé déterminé relativement au signe au moyen d'un sens positif fixé sur la sphère. Cet angle, ainsi défini, n'est déterminé qu'à un multiple près de 180°.

Si deux figures ont pour distance 90°, cela revient donc à dire qu'il faut tourner («renverser») l'une de 180° pour l'amener sur l'autre.

Une «droite» de notre système est définie une série de ∞^1 figures capables de se superposer en tournant autour d'un même point de la sphère.

Nous appelons ce point le *point directeur de la droite.*

Les diverses figures constituent les points de la droite.

La droite est alors déterminée par deux de ses points; et trois points A, B et C d'une même droite satisfont à la relation de distance

$$(AB) + (BC) = (AC).$$

L'angle que font deux droites de notre espace est défini en grandeur et en signe la distance sphérique entre les points directeurs des droites.

7. Nous définissons le plan un système de points (c'est-à-dire système de figures sur la sphère) où est située en entier toute droite, qui y a deux de ses points; il en résulte qu'on ne peut faire passer plus d'un plan par trois points non situés sur une même droite; et voici la preuve qu'on peut toujours faire passer un plan par trois points quelconques: Choisissons sur la sphère trois figures égales, A_1, A_2 et A_3; il y aura toujours une figure, P, symétrique des trois figures données respectives par rapport aux trois différents grands cercles joignant les points de rotation des figures deux à deux[1]).

La figure P n'appartient pas à l'espace considéré, mais elle facilitera les recherches pour étudier cet espace.

Or, toutes les figures situées sur la sphère et symétriques de P, forment précisément le système de figures que nous cherchons.

---

[1]) Voir *Notes* de M. Darboux dans Kœnigs: *Leçons de cinématique*, p. 351.

En effet, si l'on a deux de ces figures F_1 et F_2, les grands cercles par rapport auxquels F_1 et F_2 sont symétriques de P, se couperont au point de rotation de F_1 et de F_2, et si l'on construit des figures nouvelles, symétriques de P par rapport aux différents grands cercles passant par ce point de rotation, on obtient un système qui forme une droite ayant ce point directeur. Construit-on une figure U, symétrique de P par rapport au centre de la sphère, on arrive, dans l'espace considéré, à une figure dont les distances à toutes les figures formant le plan $[A_1 A_2 A_3]$ sont de 90°.

Le plan est donc le lieu de tous les points dont les distances à un point donné sont de 90°.

Appelons U le pôle du plan, et ce dernier le plan polaire de U. On appelle P la figure opposée du plan.

Deux droites quelconques du plan se coupent toujours en un point, et seulement en un point.

Traçons le grand cercle qui joint les points directeurs des droites: la figure symétrique de P par rapport à ce grand cercle doit alors appartenir aux deux droites, et, d'après la définition de nos droites, deux d'entre elles ne peuvent jamais avoir de commun plus d'un seul point.

C'est pourquoi ce plan constitue un plan riemannien.

8. Deux plans se coupent toujours suivant une droite; car toutes les figures de la sphère, situées symétriquement aux figures opposées des deux plans constituent une droite ayant son point directeur dans le point de rotation des figures opposées.

Il en résulte que, dans un plan, le lieu géométrique des points qui ont 90° pour distance à un point fixe, est une droite, appelée *polaire* du point. De plus et inversement, toute droite du plan aura un pôle correspondant. Deux droites du plan passant par le pôle l'une de l'autre, sont perpendiculaires l'une à l'autre. Trois points du plan, A, B et C, déterminent un *triangle* dont les côtés (AB), (BC), (CA) et dont les angles A, B et C sont déterminés d'après les côtés et angles respectifs du triangle sphérique formé par les points de rotation des figures deux à deux (nº 5).

De cette manière, la géométrie métrique du plan riemannien s'identifie avec la géométrie sphérique ordinaire: aussi cette dernière peut-elle nous fournir toutes les formules dont nous avons besoin.

Un cercle du plan est défini le lieu géométrique des points dont la distance à un point fixe est constante. Si la distance est de 90°, le cercle devient une droite.

Chaque triangle du plan a un triangle polaire univoquement déterminé, c'est-à-dire un triangle dont les sommets sont les pôles des côtés de l'autre, et inversement. Les côtés de l'un des triangles sont égaux aux angles de l'autre triangle.

Deux systèmes de points du plan sont dits congruents, si leurs points se correspondent bi-univoquement et que les distances correspondantes des deux systèmes soient égales et de mêmes signes. Alors les systèmes correspondants de points de rotation deviennent congruents.

9. Une droite est dite normale à un plan, si elle en contient le pôle. Elle coupe le plan en un point appelé *le pied de la normale* et qu'on dit la projection des points de la droite sur le plan. Le pôle du plan a une projection indéterminée sur le plan.

Une normale à un plan est perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passent par le pied de cette dernière, mais ne l'est à aucune autre, car deux droites du même plan ne peuvent pas avoir le même point directeur.

En effet, si, dans un plan, on veut construire une droite dont le point directeur est donné, il faut former toutes les figures symétriques de la figure opposée du plan par rapport aux différents grands cercles qui passent par le point directeur. Il y aura donc une droite et rien qu'une.

10. Des droites et des plans passant par un même point de l'espace en question forment un *faisceau*, et coupent le plan polaire du point suivant une *figure* dont les distances et les angles sont égaux aux angles formés par les droites et plans correspondants du faisceau [1]).

Une *sphère* est définie le lieu géométrique des points qui ont une distance constante — le rayon — à un point fixe: le centre de la sphère. Si le rayon est 90°, la sphère devient un plan. La *sphère* est-elle coupée par un faisceau de droites ayant pour sommet le centre, chacune des droites du faisceau la coupera en deux points. Sur la *sphère*, les *côtés* et les *angles* des *figures sphériques* seront égaux, respectivement, aux côtés et angles de la projection des figures sur le plan polaire du centre.

11. On appelle *invariable* un système de points se mouvant de manière à ne pas faire changer les distances mutuelles des points.

Deux systèmes égaux du même plan peuvent être amenés à se superposer par une *rotation* autour d'un point détérminé du plan. Pendant ce mouvement, chaque point décrit un cercle; toutefois il y aura une droite, la polaire du point fixe, qui glisse sur elle-même durant le mouvement.

C'est pourquoi une rotation effectuée dans le plan riemannien peut être déterminée par le point de rotation et l'amplitude, ou bien par la droite glissant sur elle-même et par la grandeur du déplacement. Ici les choses se passent tout à fait comme dans la géométrie sphérique.

---

[1]) L'angle que forment deux plans est défini la distance des pôles des plans.

Est-on en présence de trois rotations successives qui se détruisent les unes les autres (dans le plan riemannien), les angles du triangle formé par les centres de rotation constitueront les moitiés des amplitudes.

Dès lors, on peut aisément transférer dans notre géométrie plane la proposition, établie au n^0 4, concernant les rotations effectuées sur la sphère.

Il est évident qu'en somme chaque proposition sphérique fournira une proposition relative au plan riemannien; il n'y a pas donc lieu de s'en occuper ultérieurement.

12. Nous venons de voir que deux plans de l'espace considéré se coupent l'un l'autre suivant une droite. Il en résulte qu'une droite coupe un plan en un point et que trois plans qui ne passent point par une même droite, ont toujours un point commun, et n'en ont qu'un.

13. Deux droites ayant le même point directeur sont dites *parallèles de la 1re espèce*; ne pouvant pas se couper, elles ne sont jamais situées dans un même plan. Il résulte de cette définition qu'on peut tracer, par chaque point de l'espace, une certaine droite déterminée, parallèle de la 1re espèce à une droite donnée. On voit aussi qu'une droite quelconque forme des angles égaux avec deux parallèles de la 1re espèce.

On nomme *parallèles de la 2^e espèce* deux droites capables d'être amenées à se superposer sur la sphère fondamentale en tournant autour d'un point sur la sphère fondamentale. Elles ne sont jamais situées dans le même plan, puisqu'elles sont coupées par une infinité de parallèles de la 1re espèce; ces dernières les coupent à angles égaux.

La droite étant un système de figures égales sur la sphère fondamentale, une rotation de la droite, effectuée sur la surface de la sphère, sera déterminée par la rotation d'une seule de ces figures. C'est pourquoi deux droites parallèles de la 2^e

espèce peuvent être amenées à se superposer par le fait qu'une figure quelconque de l'un des systèmes est amenée sur une figure quelconque de l'autre système. Cela montre que deux droites parallèles de la 2e espèce forment des angles égaux avec chaque droite qui les coupe l'une et l'autre. Ensuite, la même considération montre que, par un point de l'espace, on peut tracer une droite seule, parallèle de la 2e espèce à une droite donnée.

Toutes les droites coupant deux parallèles de la 2e espèce ont leurs points directeurs dans un grand cercle perpendiculaire au milieu de l'arc de grand cercle qui joint les points directeurs des deux parallèlès.

Deux droites parallèles de la 2e espèce peuvent être amenées, sur la sphère fondamentale, à se superposer par une rotation effectuée autour du pôle de l'arc qui joint les points directeurs et égale à la distance sphérique de ces derniers. Par conséquent:

Deux droites parallèles de la 2e espèce ont partout la même distance, et celle-ci est la moitié de l'angle des droites. Il est immédiatement évident que les droites parallèles de la 1re espèce ont partout la même distance; mais l'angle de ces droites est nul.

Toutes les droites qui coupent à angle droit deux parallèles de la 2e espèce, sont parallèles de la 1re espèce (ayant un point directeur commun dans le pôle du grand cercle qui joint les points directeurs des deux droites).

Deux droites peuvent être situées de manière à pouvoir être considérées comme parallèles tant de la 1re espèce que de la 2e; on les appelle alors *polaires réciproques.* Si une droite donnée sur la sphère fondamentale tourne de 180° autour d'un point qui a 90° pour distance sphérique au point directeur de la droite, on obtient la polaire de la droite donnée.

Chaque point de l'une de deux polaires réciproques est à 90° de chaque point de l'autre.

Convenons que, dans ce qui suit, on appellera parallèles de la 1re espèce deux polaires réciproques, celles auxquelles on assigne le même point directeur, et, d'autre part, nous les qualifierons de parallèles de la 2e espèce, si on leur donne des points directeurs différents qui, alors, doivent être diamétralement opposés.

Par chaque point de l'espace on peut tracer deux droites parallèles à une droite donnée, savoir une de la 1re espèce et une de la 2e. Cependant celles-ci peuvent coïncider dans un cas, celui où le point donné est le pôle d'un plan passant par la droite donnée.

14. Deux droites quelconques, non parallèles, ont toujours deux normales communes (c'est-à-dire deux droites qui les coupent à angle droit l'une et l'autre). Les deux normales communes sont des polaires réciproques.

Soient **a** et **b** les deux droites, A et B leurs points directeurs. Supposons donnés sur les droites deux points respectifs **A** et **B** ayant P pour point de rotation. Le grand cercle AB est supposé avoir un sens positif déterminé; son pôle positif C est pris pour point directeur de la normale cherchée commune à **a** et à **b**, et cette normale commune est supposée couper ces dernières respectivement en $\mathbf{A}_1$ et en $\mathbf{B}_1$. Considérons maintenant sur la sphère fondamentale les quatre rotations que voici:

1⁰ de **B** à **A** 2⁰ de **A** à $\mathbf{A}_1$ 3⁰ de $\mathbf{A}_1$ à $\mathbf{B}_1$ 4⁰ de $\mathbf{B}_1$ à **B**.

Désignons respectivement (voir n⁰ 2) ces rotations par
1⁰ (u, P) 2⁰ (α, A) 3⁰ (γ, C) 4⁰ (β, B).

Les points de rotation P, A, C et B sont connus, de même que l'amplitude u, tandis que α, γ et β sont des quantités inconnues. D'après le n⁰ 4, ces dernières peuvent être déterminées de deux manières:

1^0 $\alpha = \alpha_1$ $\gamma = \gamma_1$ $\beta = \beta_1$
2^0 $\alpha = 180^\circ + \alpha_1$ $\gamma = 2AB - \gamma_1$ $\beta = 180^\circ + \beta_1$.

Il y a donc deux normales communes $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$, en sorte que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) = \tfrac{1}{2}\gamma_1 + \tfrac{1}{2}(2AB - \gamma_1) = AB.$$

Ensuite nous voyons que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = 90^\circ, \quad (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) = 90^\circ.$$

$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)$ sont appelées les distances de **a** à **b**.

Ces distances sont parfaitement déterminées quand les droites données ont des points directeurs déterminés et que le grand cercle qui joint ces derniers, a un sens positif donné.

On se sert du quadrilatère sphérique $PACB$ pour construire les deux distances. Si l'on construit un nouveau quadrilatère sphérique ayant les mêmes côtés, tandis que $\angle P$ est diminué de u, les angles de ce quadrilatère (deux solutions) détermineront les rotations α, γ et β. (Voir n⁰ 5.)

La somme des distances des deux droites est égale à l'angle des droites.

Appelons paramètre des droites la différence des distances.

Principe de la géométrie des droites dans l'espace elliptique.

15. Nous allons montrer comment les deux espèces de parallèles, dont Clifford (*Mathematical Papers*) a le premier donné la définition, peuvent servir à établir une base de la géométrie non euclidienne des droites, base semblable à celle que nous avons établie précédemment (*Nouv. pr.*) pour la géométrie des droites dans l'espace euclidien.

En conséquence du développement qui précède, nous avons d'emblée la proposition suivante:

1^0 Si l'on a deux droites quelconques a et b et que, par un point de l'espace, on fasse passer les droites a_1 et b_1, parallèles respectives de la 1[re] espèce à a et à b, l'angle formé par a_1 et b_1 sera égal à la somme des distances de a à b.

Nous avons ensuite à prouver la proposition correspondante sur les parallèles de la 2[e] espèce.

2[0] Si l'on a deux droites quelconques a et b et que, par un point de l'espace, on fasse passer les droites a_2 et b_2, parallèles de la 2[e] espèce respectivement à a et à b, l'angle formé par a_2 et b_2 sera égal à la différence des distances de a à b.

L'une des distances de a à b est supposée rencontrer ces dernières aux points **A** et **B** (représentés comme ci-dessus par des figures sphériques). Les points directeurs (sur la sphère) relatifs à a et à b sont appelés A et B. A-t-on un point arbitraire **C**, par lequel on fait passer a_2 et b_2, parallèles de la 2[e] espèce à a et à b, on obtient les points directeurs A_2 et B_2 respectivement de a_2 et de b_2, en faisant suivre, sur la sphère, A et B invariablement liés aux figures respectives **A** et **B**, ces dernières étant supposées avoir atteint par rotation la position **C**. Alors l'arc du grand cercle $A_2 B_2$ est égal à l'angle formé par a_2 et b_2. En laissant A invariablement lié à **A**, en amenant cette figure sur **C**, on obtient donc A_2; si l'on tourne ce point invariablement lié à **C** jusqu'à amener cette figure sur **B**, on obtient un point A_3, en sorte que $\smile A_2B_2 = A_3B$. Toutefois on pourrait aussi arriver à A_3 en laissant A invariablement lié à **A**, celui-ci étant amené sur **B**, et comme cette rotation fait mouvoir A sur le grand cercle AB, on obtient

$$(a_2b_2) = (A_2B_2) = (A_3B) = (AB) - 2(\mathbf{AB}).$$

Mais, (AB) étant égal à la somme des distances de la droite a à la droite b, il en résulte que nous trouvons (a_2b_2) égal à la différence de ces distances.

Ce qui démontre la proposition.

Si l'on a dans l'espace un système arbitraire de droites a, b, c ... et que, par un point fixe quelconque, on fasse passer 1⁰ des droites a_1, b_1, c_1 ..., parallèles de la 1ʳᵉ espèce aux droites données, et, 2⁰ des droites a_2, b_2, c_2 ..., parallèles de la 2ᵉ espèce aux droites données, on peut appliquer à chacun des faisceaux formés ainsi $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ et $(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ les relations que nous a fait connaître la géométrie sphérique et qui existent entre les angles formés mutuellement par des droites passant par un même point. Nous avons alors la proposition que voici:

Les angles d'une figure de droites et les paramètres correspondants de cette même figure satisfont aux mêmes relations identiques.

Entre les éléments de la figure de droites il n'y a pas d'autres relations identiques que celles qui résultent de ce principe. C'est que les droites a_1 et a_2 déterminent univoquement a (conformément à la convention du n⁰ 13).

Nous venons de démontrer que la géométrie des droites de l'espace elliptique est identique à celle des paires de points sur la sphère. Si nous faisons consister chaque paire de points en deux points infiniment peu distants, on aboutit à l'exposition de la géométrie euclidienne des droites.

Composition de rotations dans l'espace elliptique.

16. Considérons maintenant le mouvement d'une figure invariable dans un espace elliptique. On définit la figure invariable une figure mobile où les distances mutuelles des points sont constantes (même par rapport aux signes).

Voici les mouvements les plus simples dans l'espace considéré:

1⁰ La translation de la 1ʳᵉ espèce, c'est-à-dire le mouvement où toutes les trajectoires sont des droites parallèles de la 1ʳᵉ espèce. Ce mouvement est identique à une rotation, sur la sphère fondamentale, du système de figures qui représente notre système de points.

Toutes les droites de la figure dans l'espace elliptique deviendront des parallèles de la 2e espèce aux droites primitives.

La translation de la 1re espèce se trouve parfaitement déterminée par le déplacement ($\mathbf{AA}_1$) d'un des points, $\mathbf{A}$, de la figure à la position $\mathbf{A}_1$.

On voit immédiatement que deux translations successives ($\mathbf{AB}$) et ($\mathbf{BC}$) ont pour résultante la translation ($\mathbf{AC}$).

Cette addition géométrique dans l'espace en question est identique à une composition des rotations sphériques correspondantes (multiplication de quaternions).

La condition pour qu'un système de translations successives de la 1re espèce se détruise, est qu'il existe un polygone fermé dont les côtés sont égaux et parallèles aux translations, et se suivent dans la succession correspondant à ces dernières.

2º La translation de la 2e espèce, c'est-à-dire le mouve- où toutes les trajectoires sont des parallèles de la 2e espèce. Là, toutes les droites de la figure deviennent des droites qui sont parallèles de la 1re espèce aux droites primitives.

La translation de la 2e espèce est déterminée par le déplacement d'un seul point. Deux translations de la 2e espèce peuvent être composées en une nouvelle de la 2e espèce.

3º La rotation, c'est-à-dire le mouvement où les points d'une droite déterminée restent fixes. Alors, tous les autres points décrivent des cercles dont le centre est situé sur l'axe de rotation (c'est-à-dire la droite fixe), tandis que le plan de chacun de ces cercles est plan polaire d'un point correspondant situé dans l'axe. Cependant tous les points du polaire de l'axe de rotation glisseront (par segments égaux) sur ce dernier. Les déplacements de ces points sont égaux à l'amplitude.

Nous assignons toujours le même point directeur à l'axe de rotation et à son polaire.

17. Dans la géométrie euclidienne nous représentons des rotations infiniment petites au moyen de translations sur les axes de rotation, translations qui sont proportionnelles à ces rotations. On compose alors des rotations passant par le même point, en composant les translations correspondantes. Nous allons maintenant prouver que quelque chose de semblable a lieu dans la géométrie de Riemann; là, toutefois, l'exposition acquiert une applicabilité générale, même à des rotations finies.

Voici la proposition que nous allons démontrer:

Une rotation de la grandeur θ est représentée dans l'espace elliptique par une translation de la grandeur $\frac{1}{2}\theta$ sur l'axe de rotation.

Alors, des rotations dont les axes passent par le même point, peuvent être composées au moyen de l'addition géométrique des translations correspondantes.

On n'a qu'à montrer que si trois rotations se détruisent, il en sera de même des translations correspondantes.

Les axes de rotation sont supposés passer par le point $\mathbf{O}$ et en couper le plan polaire respectivement en $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. Le triangle polaire de $\mathbf{ABC}$ est $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$. Sur $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$ et $\mathbf{OC}$, nous prenons respectivement $\mathbf{OA}_2 = \frac{1}{2}\alpha$, $\mathbf{OB}_2 = \frac{1}{2}\beta$, $\mathbf{OC}_2 = \frac{1}{2}\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ étant les amplitudes correspondant aux rotations effectuées autour de $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$ et $\mathbf{OC}$. Or, les rotations α, β, γ étant effectuées dans l'ordre nommé, doivent se détruire.

Alors on a

$$\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \mathbf{C}_1\mathbf{A}_1 = \tfrac{1}{2}\beta, \quad \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Les points directeurs respectifs de

$\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ sont appelés A, B et C, et sont également points directeurs respectifs de $\mathbf{OA}_2$, $\mathbf{OB}_2$ et $\mathbf{OC}_2$ (n° 16, 3°).

Les angles du $\triangle\, ABC$ sont appelés A, B et C.

On a alors $A = \frac{1}{2}\alpha$, $B = \frac{1}{2}\beta$, $C = \frac{1}{2}\gamma$.

Mais cela prouve précisément que les translations $\mathbf{OA}_2$, $\mathbf{OB}_2$ et $\mathbf{OC}_2$ se détruisent.

Transition de l'exposition précédente de l'espace elliptique à l'exposition faite analytiquement à l'aide d'une surface fondamentale.

18. Choisissons dans l'espace considéré quatre points X, Y, Z et U, ayant deux à deux 90° pour distance. Alors un autre point arbitraire A peut être représenté par les coordonnées

$$\alpha = (XA), \quad \beta = (YA), \quad \gamma = (ZA), \quad \delta = (UA).$$

Celles-là doivent satisfaire à la relation:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1,$$

ce qu'on prouve en projetant A en A_1 sur le plan $[XYZ]$. (UA coupe $[XYZ]$ en A_1).

On a alors:

$$\cos^2(XA_1) + \cos^2(YA_1) + \cos^2(ZA_1) = 1,$$

d'où $\sin^2\delta(\cos^2(XA_1) + \cos^2(YA_1) + \cos^2(ZA_1)) = \sin^2\delta$,

ou $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\delta,$$

qu'on écrit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$.

A-t-on deux points A et A_1, dont le premier est déterminé par les coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, l'autre par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, on aura la distance de l'un à l'autre déterminée par:

$$\cos(AA_1) = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 + \cos\delta\cos\delta_1.$$

En effet, si l'on appelle respectivement les droites UA et UA_1 a et a_1, on obtient (au moyen du triangle AUA_1):

$$\cos(AA_1) = \cos(UA)\cos(UA_1) + \sin(UA)\sin(UA_1)\cos(aa_1).$$

Or, si l'on désigne UX, UY et UZ par x, y et z, on a:

$$\cos(aa_1) = \cos(xa)\cos(xa_1) + \cos(ya)\cos(ya_1) + \cos(za)\cos(za_1);$$

par conséquent:

$$\cos(AA_1) = \cos(UA)\cos(UA_1) +$$
$$\sin(UA)\sin(UA_1)(\cos(xa)\cos(xa_1) + \cos(ya)\cos(ya_1) + \cos(za)\cos(za_1))$$

et, en considérant les triangles

$$XAU,\ XA_1U,\ YAU,\ YA_1U,\ ZAU,\ ZA_1U,$$

on obtient alors:

$$\cos(AA_1) = \cos(UA)\cos(UA_1) + \cos(XA)\cos(XA_1) + \cos(YA)\cos(YA_1) + \cos(ZA)\cos(ZA_1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant l'espace considéré peut être figuré par un espace euclidien, en ce qu'à chaque point $A(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de l'espace elliptique nous faisons correspondre un point $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, représenté par des coordonnées homogènes ordinaires de l'espace euclidien, en sorte que

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2}{\cos\beta} = \frac{x_3}{\cos\gamma} = \frac{x_4}{\cos\delta}.$$

Alors la distance AA_1, A répondant à

$$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \text{ et } A_1 \text{ à } (x_1^1 : x_2^1 : x_3^1 : x_4^1),$$

devient:

$$AA_1 = \arc\cos \frac{x_1x_1^1 + x_2x_2^1 + x_3x_3^1 + x_4x_4^1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{x_1^{1^2} + x_2^{1^2} + x_3^{1^2} + x_4^{1^2}}}.$$

Nous avons donc trouvé la détermination ordinaire de la distance dans l'espace elliptique, détermination qu'on obtient en se servant de la surface fondamentale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Dès lors nous n'avons plus besoin de prouver que nos définitions de distances et d'angles sont d'accord avec les définitions connues [1]).

Géométrie des droites dans l'espace hyperbolique.

19. Quant aux résultats où nous sommes arrivés par la voie géométrique dans l'espace elliptique, nous pouvons les transférer

---

[1]) Voir Klein: *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie* (Math. Ann., Bd. 4).

immédiatement à la géométrie hyperbolique, ces deux géométries ayant la même base analytique. La seule différence consiste en ce que, pour les mensurations, dans l'une de ces géométries, on se sert d'une surface fondamentale imaginaire, et, dans l'autre, d'une réelle. Aussi les identités analytiques qui expriment les propositions de la géométrie elliptique, peuvent-elles servir d'expression à des propositions de la géométrie hyperbolique. Par conséquent, on peut de même transférer, et sans aucune preuve nouvelle, dans la géométrie hyperbolique le principe établi pour la géométrie des droites.

En parcourant notre manuscrit, M. le Dr C. Juel a immédiatement entrevu la possibilité de trouver une preuve directe de cette proposition, indépendamment de la manière dont la géométrie elliptique est réellement présentée dans ce qui précède. Il nous a proposé de chercher une pareille preuve: nous l'avons ensuite trouvée, et voici comment nous la formulons:

Nous mesurons distances et angles par le logarithme du rapport anharmonique correspondant [1]), logarithme multiplié par $\frac{i}{2}$.

Nous nous servons de la définition originaire donnée par Clifford, d'après laquelle deux parallèles non euclidiennes sont deux droites partout équidistantes.

Or, si nous considérons une droite a et un point arbitraire P, on peut tracer de P une droite unique n coupant à angle droit a en A. n', polaire absolue de n, coupe a en A'. Si alors nous prenons sur n' $A'A_1 = PA$ et $A'A_2 = AP$ [2]) (A_1 et A_2 étant des points imaginaires conjugués), les droites PA_1 et PA_2 seront parallèles à a (et, ajoutons-le, respectivement de

[1]) Voir Klein: *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie* (Math. Ann., Bd. 4).

[2]) En groupant sur n et n' les sens positifs de manière que le sens de n' corresponde à une rotation à droite pour le sens de n.

la 1[re] espèce et de la 2[e]), et détermineront univoquement la droite a.

Si ensuite nous avons deux droites quelconques a et b qui coupent la surface fondamentale, nous pourrons trouver deux droites p et q (p coupant cette surface, tandis que q ne la coupe pas) qui coupent à angle droit a et b; p coupe respectivement a et b en A et en B, et q les coupe respectivement en A^1 et en B^1. On prend sur q $B^1A_1 = AB$ et $B^1A_2 = BA$.

Les droites joignant A respectivement à A_1 et à A_2 sont appelées p_1 et p_2, lesquelles sont les parallèles cliffordiennes à b, tracées par A. Alors on a

$$(ap_1) = A^1A_1 = A^1B^1 + AB$$

et

$$(ap_2) = A^1A_2 = A^1B^1 - AB.$$

Or, si l'on fait passer par P, point arbitraire situé dans l'espace, les droites a_1 et b_1, parallèles respectives de la 1[re] espèce à a et à b, et a_2 et b_2, parallèles respectives de la 2[e] espèce à a et à b, on voit que

$$(a_1b_1) = (ap_1) \quad \text{et} \quad (a_2b_2) = (ap_2).$$

De ces équations il n'y en a que la première qui ait besoin d'être démontrée. Or, cette démonstration réside dans le fait que les plans $[a_1b_1]$ et $[ap_1]$ coupent la surface fondamentale suivant deux sections coniques d'où les paires de droites respectives a_1b_1 et ap_1 découpent des groupes de points qui sont projectifs, les quatre points d'un groupe étant joints aux points correspondants de l'autre au moyen de génératrices de la même espèce, situées sur la surface fondamentale.

Par conséquent

$$(a_1b_1) = A^1B^1 + AB$$

et

$$(a_2b_2) = A^1B^1 - AB.$$

Mais cela sert de preuve au principe précédemment établi pour la géométrie des droites.

Les deux grandeurs $A^1B^1 + AB$ et $A^1B^1 - AB$ sont imaginaires conjuguées, et la géométrie des droites de l'espace hyperbolique est donc identique à la géométrie de toutes les droites (réelles et imaginaires) passant par le même point.

Par conséquent, on peut rattacher toute géométrie des droites à la géométrie de la paire de points sur une surface sphérique réelle. Dans l'espace elliptique, la paire de points consiste en des points réels séparés; dans l'espace euclidien, en points réels infiniment peu distants, et dans l'espace hyperbolique, en des points imaginaires conjugués.

Ce même principe montre que la géométrie des figures égales dans l'espace (la théorie relative aux mouvements hélicoïdaux) peut se rapporter à la géométrie dont l'élément est une paire de figures égales ayant un seul point fixe. Dans la géométrie elliptique, les deux figures sont réelles et séparées. Dans la géométrie euclidienne, elles coïncident. Dans la géométrie hyperbolique, elles sont imaginaires conjuguées.

20. Notre principe donne à la géométrie hyperbolique une importance toute particulière pour la géométrie des éléments imaginaires.

Le système de toutes les droites (tant réelles qu'imaginaires) passant par un point fixe de l'espace euclidien, est représenté par le système de droites réelles qui coupent un ellipsoïde réel (la surface fondamentale).

Un faisceau plan de droites complexes est représenté par une congruence linéaire dont les directrices sont des polaires réciproques par rapport à la surface fondamentale.

Un système de droites complexes appartenant au même faisceau et dont quatre droites arbitraires ont un rapport anharmonique réel, est représenté par un système de droites formant une surface du 4e ordre [1]).

Un système de droites complexes ∞^2, projectif à un faisceau de droites réelles ∞^2 passant par le même point, est représenté par un *réseau harmonique* (système formé, d'après des lois correspondantes, dans l'espace non euclidien, comme celui mentionné dans *Nouv. pr.*, p. 22).

Le système de toutes les figures (réelles et imaginaires) égales entre elles, ayant un seul point commun dans l'espace euclidien, est représenté par le système de toutes les figures réelles égales entre elles dans l'espace hyperbolique.

En conséquence, chaque mouvement hélicoïdal dans l'espace hyperbolique peut être considéré comme la représentation de la rotation d'une figure imaginaire dans l'espace euclidien. Or, les lois relatives à la cinématique dans l'espace hyperbolique se formulent très simplement.

Conséquemment à cette dernière proposition, nous pouvons aussi voir dans le système de toutes les figures ∞^6 réelles égales de l'espace hyperbolique la représentation des points ∞^6 réels et imaginaires de l'espace elliptique.

Toutes les propositions présentées dans *Nouv. pr.*, modifiées convenablement sous le rapport de l'expression, sont applicables à l'espace non euclidien. Dans l'espace hyperbolique, elles expriment simplement que certaines propositions s'appliquant aux éléments réels sont justes aussi pour les éléments complexes.

Notre principe nous donnant l'exposition de la géométrie des figures égales seulement à l'aide de la géométrie des figures

---

[1]) Voir Lindemann: *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Math. Ann., Bd. 7, p. 56).

égales qui ont un seul point commun, nous donne d'emblée aussi les extensions correspondantes de l'idée de quaternion:

1⁰ dans la géométrie euclidienne: $q_1 + \varepsilon q_2$, où q_1 et q_2 sont des quaternions, tandis que ε est un symbole avec lequel on opère en sorte que $\varepsilon^2 = 0$;

2⁰ dans la géométrie elliptique: $q_1 + \omega q_2$, où q_1 et q_2 sont des quaternions, tandis que ω est un symbole avec lequel on opère en sorte que $\omega^2 = 1$;

3⁰ dans la géométrie hyperbolique: $q_1 + i q_2$, où $i^2 = -1$.

Les deux premières espèces de biquaternions ont été établies par Clifford[1]), la dernière constitue les biquaternions d'Hamilton.

---

[1]) Clifford: *Mathematical Papers* (Preliminary Sketch of Biquaternions).